

# МАТЕМАТИКА 1

## ЛЕКЦИЈА 4

### 2 --- Л4.1 ЈЕДНАЧИНА РАВНИ И ЈЕДНАЧИНЕ ПРАВЕ

#### Координате тачке

*Увођење координатног система:*  $O$  -- фиксирана тачка;  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$  --- фиксирани јединични узајамно ортогонални вектори такви да уређена тројка  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  има десну оријентацију.  $x$ ,  $y$ ,  $z$  --- осе кроз тачку  $O$  са јединичним векторима  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$ . Тачка  $O$ , вектори  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$ , и осе  $x$ ,  $y$ ,  $z$  заједно чине координатни систем. Ознака:  $Oxyz$ . Координате произвољне тачке  $M$  у односу на координатни систем  $Oxyz$  су координате вектора  $\overrightarrow{OM}$  у односу на векторе  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$ . Ознака:  $M(x, y, z)$ .

*Растојање двеју тачака  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  и  $M_2(x_2, y_2, z_2)$  у координатама:*

$$\begin{aligned} d(M_1, M_2) &= \left| \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} \right| = \left| (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \right| = \\ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \end{aligned}$$

*Подела дужи у датом односу у координатама:* Дате су тачке  $A(x_A, y_A, z_A)$  и  $B(x_B, y_B, z_B)$ , и бројеви  $m$  и  $n$  такви да је  $n > 0$  и  $m + n \neq 0$ . Нека је  $S(x_S, y_S, z_S)$  тачка на правој  $AB$  која дели дуж  $AB$  у односу  $m:n$ . Тада је

$$x_S = \frac{nx_A + mx_B}{m+n}, \quad y_S = \frac{ny_A + my_B}{m+n}, \quad z_S = \frac{nz_A + mz_B}{m+n},$$

према раније спроведеном изражавању вектора  $\overrightarrow{OS}$  преко  $\overrightarrow{OA}$ ,  $\overrightarrow{OB}$  и  $\lambda = \frac{m}{n}$ .

*Површина троугла у координатама:* Дате су неколинеарне тачке  $M_i(x_i, y_i, z_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Тада је

$$\begin{aligned} P(\Delta M_1 M_2 M_3) &= \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{M_1 M_2} \times \overrightarrow{M_1 M_3} \right| = \frac{1}{2} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}, \\ \alpha &= \begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}, \quad \beta = \begin{vmatrix} z_2 - z_1 & x_2 - x_1 \\ z_3 - z_1 & x_3 - x_1 \end{vmatrix} = \end{aligned}$$

$$= \begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix}, \quad \gamma = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

*Запремина тетраедра у координатама:* Дате су некопланарне тачке  $M_i(x_i, y_i, z_i)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ . Тада је запремина  $V$  тетраедра  $M_1M_2M_3M_4$  једнака

$$\frac{1}{6} \left| \left[ \overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}, \overrightarrow{M_1M_4} \right] \right| = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}.$$

### Једначина равни

Свака раван  $\pi$  може се задати неком једначином облика  $Ax + By + Cz + D = 0$  ( $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$ ) (линеарна једначина по  $x, y, z$ ), и обрнуто, свака таква једначина представља неку раван. Притом је не-нула вектор  $\vec{a} = (A, B, C)$  ортогоналан на раван  $\pi$ . Од једне линеарне једначине равни  $\pi$  добијају се све, множењем те једначине бројевима различитим од нуле. Докази --- на вежбама (АГ).

*Једначина равни  $\pi$  кроз дату тачку  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  ортогоналне на дати вектор  $\vec{a} = (A, B, C) \neq 0$  ---  $\pi: A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ .*

*Једначина равни  $\pi$  кроз три дате (неколинеарне) тачке  $M_i(x_i, y_i, z_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ :*

$$\pi: \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Извођење --- на вежбама (АГ).

*Сегментни облик једначине равни ---  $\pi: \frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{p} = 1$  ( $mnp \neq 0$ ).* Ако су бројеви  $m, n$  и  $p$  позитивни, онда они представљају дужине одсечака (сегмената) које раван  $\pi$  одређује на координатним осама. Извођење --- на вежбама (АГ).

*Нормални облик једначине равни ---  $\pi: x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0$ .* Притом су  $\alpha, \beta, \gamma$  углови које јединични вектор  $\vec{n} = \overrightarrow{ON}$ , ортогоналан на  $\pi$  и усмерен ка  $\pi$ , образује са координатним осама  $x, y, z$ , а  $p$  растојање тачке  $O$  од  $\pi$ . Извођење --- на вежбама (АГ).

Растојање тачке  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  од равни  $\pi: x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0$  ---  $d(M_1, \pi) = |x_1 \cos \alpha + y_1 \cos \beta + z_1 \cos \gamma - p|$ . Извођење --- на вежбама (АГ).

Угао између две равни  $\pi_1$  и  $\pi_2$  --  $\cos \angle(\pi_1, \pi_2) = |\cos \angle(\vec{a}_1, \vec{a}_2)|$ . Притом је  $\pi_i: A_i x + B_i y + C_i z + D_i = 0$  и  $\vec{a}_i = (A_i, B_i, C_i)$ ,  $i = 1, 2$ . Специјално,  $\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0$ .

Међусобни положај двеју равни:  $\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset \Leftrightarrow A_1 : A_2 = B_1 : B_2 = C_1 : C_2 \neq D_1 : D_2$ ;  $\pi_1 \cap \pi_2$  -- права  $\Leftrightarrow \neg(A_1 : A_2 = B_1 : B_2 = C_1 : C_2)$ ;  $\pi_1 \equiv \pi_2 \Leftrightarrow A_1 : A_2 = B_1 : B_2 = C_1 : C_2 = D_1 : D_2$ .

### Једначине праве

Канонски облик једначина праве ---  $l: \frac{x-x_0}{b_1} = \frac{y-y_0}{b_2} = \frac{z-z_0}{b_3}$ . Притом је  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  једна тачка на правој  $l$ , а  $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$  један не-нула вектор паралелан правој  $l$ .

Параметарски облик једначина праве ---  $l: x = b_1 t + x_0, y = b_2 t + y_0, z = b_3 t + z_0$ .

Једначине праве кроз две дате тачке  $M_i(x_i, y_i, z_i)$ ,  $i = 1, 2$ , ---  $l: \frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$ .

Општи облик једначина праве ---  $l: \begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases}$  ( $\neg(A_1 : A_2 = B_1 : B_2 = C_1 : C_2)$ ).

Угао између две праве ---  $\cos \angle(l_1, l_2) = |\cos \angle(\vec{b}^1, \vec{b}^2)|$ , при чему је вектор  $\vec{b}^i = (b_1^i, b_2^i, b_3^i)$  паралелан правој  $l_i$ ,  $i = 1, 2$ . Специјално,  $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow b_1^1 b_1^2 + b_2^1 b_2^2 + b_3^1 b_3^2 = 0$ .

Међусобни положај двеју правих: Нека је  $l_i$  права кроз тачку

$M_i(x_i, y_i, z_i)$  паралелна вектору  $\vec{b}^i = (b_1^i, b_2^i, b_3^i) \neq 0$ ,  $i = 1, 2$ . Тада:

$l_1 \parallel l_2 (\wedge l_1 \neq l_2) \Leftrightarrow b_1^1 : b_1^2 = b_2^1 : b_2^2 = b_3^1 : b_3^2 \wedge M_1 \notin l_2$ ;  $l_1$  и  $l_2$  мимоилазне  $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ b_1^1 & b_2^1 & b_3^1 \\ b_1^2 & b_2^2 & b_3^2 \end{vmatrix} \neq 0; \quad l_1 \cap l_2 \text{ --- тачка} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ b_1^1 & b_2^1 & b_3^1 \\ b_1^2 & b_2^2 & b_3^2 \end{vmatrix} = 0 \wedge \neg(b_1^1 : b_1^2 = b_2^1 : b_2^2 = b_3^1 : b_3^2); \quad l_1 \equiv l_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow b_1^1 : b_1^2 = b_2^1 : b_2^2 = b_3^1 : b_3^2 \wedge M_1 \in l_2.$$

*Угао између праве и равни* ---  $\sin \angle(l, \pi) = |\cos \angle(\vec{a}, \vec{b})|$ , где је  $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$  један не-нула вектор паралелан правој  $l$ , а  $\vec{a} = (A, B, C)$  један не-нула вектор ортогоналан на раван  $\pi$ . Специјално,  $l \perp \pi \Leftrightarrow b_1 : A = b_2 : B = b_3 : C$ .

*Међусобни положај праве и равни:* Нека је  $l$  права кроз тачку  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  паралелна вектору  $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ , а  $\pi$  раван задата једначином  $Ax + By + Cz + D = 0$ . Тада:  $l \cap \pi = \emptyset \Leftrightarrow Ab_1 + Bb_2 + Cb_3 = 0 \wedge Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$ ;  $l \cap \pi$  -- тачка  $\Leftrightarrow Ab_1 + Bb_2 + Cb_3 \neq 0$ ;  $l \subset \pi \Leftrightarrow Ab_1 + Bb_2 + Cb_3 = 0 \wedge Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$ .

*Растојање тачке  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  од праве  $l$  кроз тачку  $M_0(x_0, y_0, z_0)$*  паралелне вектору  $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$  ---  $d(M_1, l) = \frac{|\overrightarrow{M_0M_1} \times \vec{b}|}{|\vec{b}|}$ .

*Растојање двеју мимоилазних правих:* Нека је  $l_i$  права кроз тачку  $M_i(x_i, y_i, z_i)$  паралелна вектору  $\vec{b}^i = (b_1^i, b_2^i, b_3^i) \neq 0$ ,  $i = 1, 2$ , и нека је  $\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ b_1^1 & b_2^1 & b_3^1 \\ b_1^2 & b_2^2 & b_3^2 \end{vmatrix} \neq 0$ . Тада је  $d(l_1, l_2) = \frac{|\left[ \overrightarrow{M_1M_2}, \vec{b}^1, \vec{b}^2 \right]|}{|\vec{b}^1 \times \vec{b}^2|}$ .

## 2 --- Л4.2 АЛГЕБАРСКЕ КРИВЕ ДРУГОГ РЕДА У РАВНИ

### Алгебарске једначине другог степена са две непознате

Општи облик алгебарске једначине другог степена по  $x$  и  $y$ :

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \quad (1)$$

$$(A^2 + B^2 + C^2 \neq 0).$$

*Алгебарска крива другог реда у равни  $Oxy$*  је свака крива у равни  $Oxy$  која се може задати једначином облика (1). Главни примери алгебарских кривих другог реда у равни су конусни пресеци: елипсе, параболе, хиперболе.

*Транслације координатног система:* Ако је координатни систем  $Oxy$  транслиран за вектор  $\vec{v} = (p, q)$  у систем  $O'x'y'$ , тада је веза нових  $x', y', z'$  и старих координата  $x, y, z$  произвољне тачке у равни  $Oxy$  изражена једнакостима:  $x = p + x'$ ,  $y = q + y'$ . Извођење --- на вежбама (АГ).

*Ротације координатног система:* Ако је координатни систем  $O'x'y'$  добијен ротацијом  $\rho$  система  $Oxy$  око тачке  $O$  за угао  $\alpha$  (у истој равни), онда је веза нових  $x', y', z'$  и старих координата  $x, y, z$  произвољне тачке у равни  $Oxy$  изражена једнакостима:  $x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha$ ,  $y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha$ . Извођење --- на вежбама (АГ).

*Случај кад је  $B = 0$  у једначини (1):* Ако је  $AC > 0$ , једначина представља елипсу или две имагинарне праве које се секу, ако је  $AC < 0$  --- хиперболу или две праве које се секу, а у случају да је  $A = 0$  или  $C = 0$ , онда: ако је  $D \neq 0$ , односно  $E \neq 0$ , --- параболу, а ако је  $D = 0$ , односно  $E = 0$ , --- две паралелне праве или двоструку праву или две имагинарне паралелне праве. Детаљи --- на вежбама (АГ).

*Случај кад је  $B \neq 0$  у једначини (1):* Овај случај се своди на малопре размотрени ротацијом координатног система око тачке  $O$  за неки угао  $\alpha$  такав да је  $\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{A-C}{2B}$ .

*Дискусија једначине (1) помоћу инваријанте  $\Delta = AC - B^2$ :*  $\Delta > 0$  --- елиптички разред,  $\Delta = 0$  --- параболички разред,  $\Delta < 0$  --- хиперболички разред.

*Услов да једначина (1) представља две праве --- ( $\mathcal{D} =$ )*

$$\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = 0.$$

## 2 --- Л4.3 АЛГЕБАРСКЕ ПОВРШИ ДРУГОГ РЕДА

### Алгебарске једначине другог степена са три непознате

Општи облик алгебарске једначине другог степена по  $x, y, z$ :

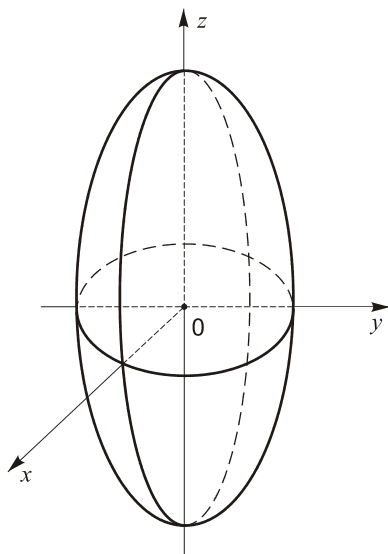
$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Eyz + 2Fxz + 2Gx + 2Hy + 2Kz + L = 0$$

( $A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + E^2 + F^2 \neq 0$ ).

*Алгебарска површ другог реда* је свака површ која се може задати једначином горњег облика.

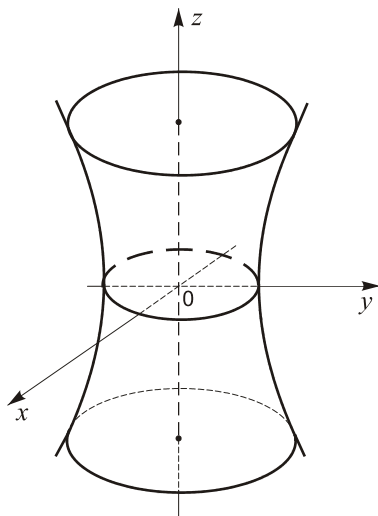
### Елипсоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (a, b, c > 0).$$



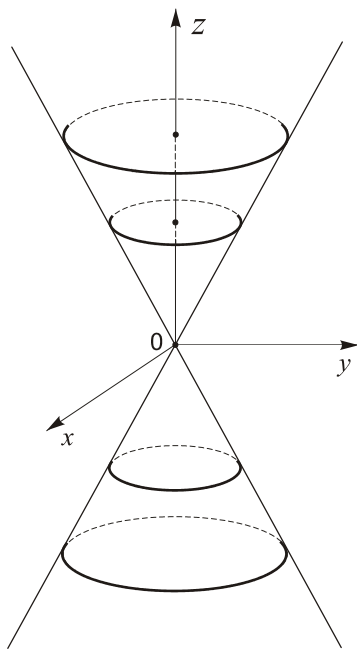
**Једнокрилни хиперболоид**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (a, b, c > 0).$$



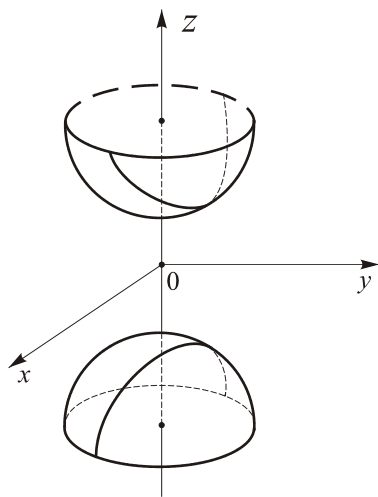
**Елиптички конус**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad (a, b, c > 0).$$



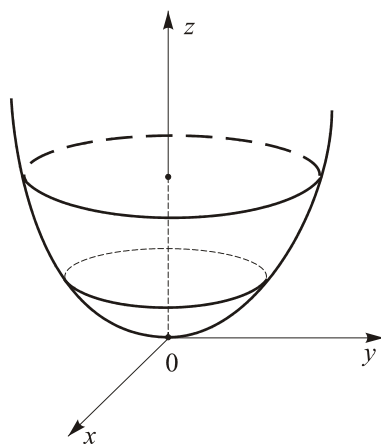
**Двокрилни хиперболоид**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \quad (a, b, c > 0).$$



**Елиптички параболоид**

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z \quad (p, q > 0).$$



### Хиперболички параболоид

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z \quad (p, q > 0).$$

